1. Záludné záření

a) Vypočtěte intenzitu slunečního záření (neboli hustotu zářivého toku) ve vzdálenosti $r = 1\,\mathrm{au}$ od Slunce. Uvažujte, že Slunce vyzařuje jako absolutně černé těleso. Poloměr Slunce je $R_S = 696000\,\mathrm{km}$ a povrchová teplota Slunce je $T_S = 5780\,\mathrm{K}$.

Nápověda: Pro vyzařování absolutně černého tělesa platí $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$, kde L je jeho zářivý výkon, R jeho poloměr, T povrchová teplota. Hodnota Stefan-Boltzmannovy konstanty je $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$ a velikost astronomické jednotky je $1\,\mathrm{au} = 1,496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$.

b) Nyní vypočtěte rovnovážnou teplotu na Zemi, pokud zanedbáme, že má atmosféru. Uvažujte, že i Země vyzařuje jako absolutně černé těleso. Planetární albedo (podíl záření které se odrazí od povrchu) Země je cca $A = 0,3$. Zhodnoťte jak moc realistická teplota vyšla a čím je nesrovnalost způsobena. Počítejte s poloměrem Země $R_Z = 6378\,\mathrm{km}$.

c) Nyní si představte, že by se Slunce zmenšilo na 50 % svého objemu. O kolik stupňů Kelvina by se musela zvýšit jeho povrchová teplota, aby rovnovážná teplota Země zůstala zachována?

d) Jaké nebezpečí by nové Slunce z bodu c) ale mohlo skýtat pro život na Zemi?

e) Nakonec zkuste spočítat rovnovážnou teplotu povrchu Země i se zahrnutím efektu atmosféry. Aby to ale nebylo moc složité, uvažme atmosféru jako pouze jednu vrstvu o konstantní teplotě. Dále předpokládejme, že všechno krátkovlnné (sluneční) záření atmosférou projde a nijak ji neovlivní, zatímco všechno dlouhovlnné (zemské) záření jí bude absorbováno. Tato „vrstva“ pak bude sama vyzařovat na obě strany, tedy dolů směrem k zemi i nahoru do vesmíru. Stejně jako u bodu a) zhodnoťte jak moc realistická teplota vyšla a čím je nesrovnalost způsobena tentokrát.

Řešení:

a) Pomocí zadaných hodnot můžeme snadno spočítat zářivý výkon Slunce. Ve vzdálenosti 1 au od slunce pak bude rovnoměrně rozložen na povrch koule o poloměru 1 au. Dostáváme tedy intenzitu (hustotu zářivého toku)

$$I = \frac{L_S}{4\pi r^2} = \frac{4\pi R_S^2 \sigma T_S^4}{4\pi r^2} \doteq 1370\,\mathrm{Wm^{-2}}$$

b) Vycházíme z toho, že systém je v rovnováze, tedy veškerá energie, která je Zemí absorbována je jí poté vyzařována. Na levé straně je zářivý tok, který Země absorbuje a na pravé straně její zářivý výkon, který naopak vyzařuje zpátky do vesmíru

$$\pi R_Z^2 I(1 - A) = 4\pi R_Z^2 \sigma T_Z^4.$$

Výsledná rovnovážná teplota Země je tedy

$$T_Z = \sqrt[4]{\frac{I(1 - A)}{4\sigma}} \doteq 255\,\mathrm{K}.$$

Tato teplota odpovídá cca -25° C, což je samozřejmě příliš málo. Důvodem je úplné zanedbání atmosféry, která Zemi ohřívá skleníkovým efektem.

c) *Zmenšení na 50 % původního objemu odpovídá zmenšení poloměru Slunce na $\sqrt[3]{0,5}$-násobek původního poloměru ($R_N/R_S = \sqrt[3]{0,5}$). Pro novou teplotu můžeme psát*

$$R_S^2 T_S^4 = R_N^2 T_N^4,$$

tedy

$$T_N - T_S = T_S\left(\sqrt{\frac{R_S}{R_N}} - 1\right) \doteq 710\,\mathrm{K}.$$

d) *Podle Wienova zákona bude Slunce vyzařovat na o něco nižších vlnových délkách. Nižší vlnové délky znamenají záření s vyšší energií, které představuje pro živé organismy vždy potenciální nebezpečí. Chrání nás před ním sice ozonová vrstva, ale tato ochrana není zdaleka 100%, obzvláště v poslední době.*

e) *Podobně jako v bodě b) budeme vycházet z energetické rovnováhy, tentokrát ale i atmosféry. Následující rovnice popisuje rovnováhu u povrchu Země*

$$\pi R_Z^2 I(1-A) + 4\pi R_Z^2 \sigma T_a^4 = 4\pi R_Z^2 \sigma T_p^4$$

$$I(1-A) = 4\sigma(T_p^4 - T_a^4),$$

kde T_p je teplota povrchu Země a T_a je teplota atmosféry. Další rovnice popisuje energetickou bilanci atmosferické vrstvy (vyzařuje nahoru i dolů)

$$2 \cdot 4\pi R_Z^2 \sigma T_a^4 = 4\pi R_Z^2 \sigma T_p^4,$$

$$T_a^4 = \frac{1}{2} T_p^4.$$

Nakonec obě rovnice spojíme a dostaneme

$$I(1-A) = 4\sigma T_p^4\left(1 - \frac{1}{2}\right),$$

$$T_p = \sqrt[4]{\frac{I(1-A)}{2\sigma}} = \sqrt[4]{2}\,T_Z \doteq 303\,\mathrm{K}.$$

To odpovídá cca 30° C, což je samozřejmě příliš moc. Důvodem je nadhodnocení skleníkového efektu v předpokladech úlohy.

2. Káva ve vlaku

Radek jede vlakem z Ostravy do Prahy rychlostí $v = 160\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$. Před sebou má uprostřed stolku o rozměru 40×40 cm položený kelímek s kávou. Kelímek je válec s jednou podstavou o poloměru $R = 2\,\mathrm{cm}$ a výškou $h = 8\,\mathrm{cm}$ o hmotnosti $m_1 = 50\,\mathrm{g}$. Uvažujte, že jak stěny, tak dno kelímku jsou stejně hrubé. Tloušťka stěn kelímku je zanedbatelná. Najednou začne vlak zatáčet. Uvažujte koeficient tření stolek-kelímek $f = 0,25$.

a) Po oblouku (části kružnice) o jakém největším poloměru musel vlak jet, aby se prázdný kelímek dostal do pohybu?

b) Vlak jede po části oblouku o poloměru $r = 500\,\mathrm{m}$ tak dlouhé, aby po následném vyrovnání směru jízdy zůstal kelímek stát přesně na okraji stolku (tedy tak, že se jeho těžiště bude nacházet přesně nad hranou). O jaký úhel se změnil směr jízdy?

Nyní uvažujte, že podél celého okraje stolku vede nepatrně vyvýšená hrana, o kterou se podstava kelímku zarazí.

c) Jaký by musel být největší možný poloměr oblouku, pokud by se kelímek nacházel na okraji stolku (jeho dno se dotýká vyvýšené hrany) a měl by se přes jeho hranu překlopit a spadnout z něj?

Řešení:

a) Ve vztažné soustavě jedoucího vlaku bude na kelímek působit odstředivá síla $F_{ods} = \frac{m \cdot v^2}{r}$. Aby se kelímek začal pohybovat, musela by být tato síla větší, než třecí síla působící mezi stolem a kelímkem $F_t = m \cdot g \cdot f$. Platí tedy

$$\frac{m \cdot v^2}{r} \geq m \cdot g \cdot f$$

$$r \leq \frac{v^2}{g \cdot f}$$

$$r_{max} \doteq 790 - 805\,\mathrm{m}$$

b) Kelímek musí urazit vzdálenost 20 cm. Nejprve na něj bude působit zrychlení vyvolané výslednicí odstředivé a třecí síly, po dosažení maximální rychlosti už jen zrychlení vyvolané sílou třecí (v opačném směru) až do samotného zastavení.

$$a_1 = \frac{v^2}{r} - f \cdot g$$

$$a_2 = f \cdot g$$

Jelikož je maximální dosažená rychlost pro obě části pohybu stejná, a oba pohyby začínají/končí nulovou rychlostí, musí platit

$$v_{max} = a_1 \cdot t_1 = a_2 \cdot t_2$$

$$t_2 = \frac{\frac{v^2}{r} - f \cdot g}{f \cdot g} \cdot t_1$$

Ze vzorce pro dráhu, kterou kelímek urazil, lze vyjádřit čas t_1, během kterého kelímek zrychloval (a vlak se tedy pohyboval po kruhové dráze)

$$s = s_1 + s_2$$

$$s = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 + \frac{1}{2}a_2 t_2^2$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot (\frac{v^2}{r} - f \cdot g) \cdot t_1^2 + \frac{1}{2} \cdot f \cdot g \cdot (\frac{\frac{v^2}{r} - f \cdot g}{f \cdot g} \cdot t_1)^2$$

$$2s = (\frac{v^4}{r^2 \cdot f \cdot g} - \frac{v^2}{r}) \cdot t_1^2$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2r^2 sfg}{v^2(v^2 - rfg)}}$$

$$t_1 \doteq 0,41 \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$$

Úhel, o který se změní směr jízdy, je roven středovému úhlu oblouku na kružnici, po které se vlak pohybuje. Úhel tedy stačí dopočítat pomocí úhlové rychlosti vlaku.

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$\phi = \omega \cdot t_1$$

$$\phi = \frac{v}{r} \cdot \sqrt{\frac{2r^2 sfg}{v^2(v^2 - rfg)}}$$

$$\phi = 0,036 \,\mathrm{rad} \doteq 2,07°$$

c) *Je potřeba spočítat výšku těžiště nad středem dna kelímku. Uvažujme nyní dno kelímku zvlášť od jeho stěny (pláště válce). Těžiště dna kelímku se nachází v nulové výšce, těžiště stěny se nachází ve výšce $frach2$. Pro hmotnost dna a stěny kelímku platí*

$$m_{dno} = \frac{V_{dno}}{V_{dno} + V_{st}} \cdot m_1$$

$$m_{st} = \frac{V_{st}}{V_{dno} + V_{st}} \cdot m_1$$

$$V_{dno} = \pi R^2 d$$

$$V_{st} = 2\pi R h d$$

$$m_{dno} = \frac{R}{R + 2h} \cdot m_1$$

$$m_{st} = \frac{2h}{R + 2h} \cdot m_1.$$

Pro výšku těžiště tedy platí

$$M_{dno} = M_{st}$$

$$m_{dno} \cdot x = m_{st} \cdot (\frac{h}{2} - x)$$

$$x = \frac{h^2}{R + 2h}$$

$$x = \frac{32}{9}\,\mathrm{cm}$$

Nyní si stačí uvědomit, že aby mohlo dojít k překlopení kelímku, musí být moment výsledné odstředivé síly působící na těžiště větší než moment gravitační síly.

$$M_G = M_{Ods}$$

$$R \cdot F_G = x \cdot F$$

$$F = \frac{R \cdot F_G}{x}$$

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{R \cdot mg}{x}$$

$$\frac{v^2}{r} = \frac{Rg}{\frac{h^2}{R+2h}}$$

$$r = \frac{v^2h^2}{g \cdot (R^2 + 2Rh)} \doteq 358\,\mathrm{m}$$