Polynomiální rovnice

V letošní praktické části se zaměříme na polynomy, speciálně řešení polynomiálních rovnic. Jednou z polynomiálních rovnic je – vám jistě dobře známá – kvadratická rovnice. Způsob řešení kvadratické rovnice samozřejmě dobře znáte už ze základní školy, nemělo by vám tedy dělat žádný problém tento vzoreček nakonec odvodit. Standardní postup při řešení rovnic vyššího řádu je na střední (ale i vysoké) škole tipnout si kořeny $\pm 1, \pm 2$ a pokud ani jedna možnost nefunguje, tak to vzdát. My se ale dnes tak jednoduše nevzdáme a zkusíme vyřešit i polynomiální rovnice vyšších řádů.

Polynomy

Polynomy jsou důležitým objektem v algebře. V tomto textu se pak budeme zabývat převážně reálnými polynomy. Co tímto pojmem myslíme by měla vysvětlit následující definice.

Definice: *Reálným polynomem f proměnné x* myslíme výraz

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

nebo zkráceně

$$\sum_{i=0}^{n} a_ix^i,$$

kde $a_0, ..., a_n$ jsou reálná čísla a platí $a_n \neq 0$. Číslo n nazveme *stupeň polynomu f* a budeme ho značit $\deg f$ (speciálně položíme stupeň nulového polynomu $\deg 0 = -1$).

Poznámka: Polynom $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ můžeme pro $m > n$ zapsat také jako $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n ... + a_mx^m$, kde $a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_m = 0$.

S polynomy se dá pracovat podobně jako s celými čísly, umíme je sčítat a odečítat, násobit a dokonce i dělit se zbytkem. To si shrneme v následujících tvrzeních:

Tvrzení: Mějme polynom $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ stupně n a polynom $g = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m$ stupně m. Potom $f + g$ (resp. $f - g$) je polynom a platí $\deg (f + g) \leq \max(m, n)$ (resp. $\deg (f - g) \leq \max(m, n)$).
Důkaz: Tvrzení můžeme dokázat přímým výpočtem. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat $n \leq m$. Dále použijeme zápis polynomu f z poznámky pod definicí a polynomy f a g sečteme. (tj. pro $n < i \leq m$ dodefinujeme $a_i = 0$)

$$f + g = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m =$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ... + (a_m + b_m)x^m,$$

Protože je součet dvou reálných čísel reálné číslo, je $f + g$ také polynomem stupně nejvýše m. Toto pak jistě platí i pro $f - g$.

$\square$

Tvrzení: Mějme nenulové polynomy $g = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ stupně n a $h = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m$ stupně m. Potom gh je polynom a $\deg{(gh)} = m + n$
Důkaz: Tvrzení můžeme znovu dokázat přímým výpočtem, stačí si rozmyslet, jak vypadá roznásobování mnohočlenů.

$$gh = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m) =$$

$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + ... + (a_nb_{m-1} + a_{n-1}b_m)x^{m+n-1} + a_nb_mx^{n+m},$$

tedy součin dvou polynomů je také polynom. Navíc protože $a_n \neq 0$ a $b_m \neq 0$ máme $a_nb_m \neq 0$, a proto $\deg gh = m + n$.

$\square$

Protože je součin polynomů zase polynom, dává smysl zabývat se dělitelností polynomů. Funguje to opět podobně jako v celých číslech – řekneme, že polynom g dělí polynom f, pokud existuje polynom h takový, že $f = gh$. Například polynom $x - 1$ dělí polynom $x^2 - 1$, protože $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Z předchozího tvrzení navíc víme, že pokud g dělí f, tak $\deg g \leq \deg f$.

Pokud polynom g nedělí polynom f, dává smysl bavit se o dělení se zbytkem. Budeme tedy hledat dva polynomy h a r takové, že $\deg r < \deg g$, splňující

$$f = gh + r.$$

Polynom r nazveme zbytkem. Postup při výpočtu je velice podobný dělení čísel se zbytkem. Nejprve vydělíme první člen polynomu f prvním členem polynomu g, čímž dostaneme částečný výsledek. Potom vynásobíme dělitele částečným výsledkem a toto odečteme od polynomu. Budeme opakovat předchozí kroky s polynomem pod čarou, dokud nedostaneme zbytek (tedy polynom s menším stupněm, než je stupeň dělitele). Ukážeme si postup ještě raději na příkladu.

$$(x^3 + 4x^2 + x - 1) : (x^2 - 1)$$

1. krok

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
(x^3 & + & 4x^2 & + & x & - & 1) & : (x^2 - 1) = x \\
-(x^3 & & & - & x) & & & \\
\hline
 & & (4x^2 & + & 2x & - & 1) &
\end{array}$$

Další kroky:

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
(x^3 & + & 4x^2 & + & x & - & 1) & : (x^2 - 1) = x + 4 \\
-(x^3 & & & - & x) & & & \\
\hline
 & & (4x^2 & + & 2x & - & 1) & \\
 & & -(4x^2 & - & 4x) & & & \\
\hline
 & & & & (6x & - & 1) &
\end{array}$$

Dostáváme tedy

$$(x^3 + 4x^2 + x - 1) : (x^2 - 1) = x + 4 \,\text{zb.}\, (6x - 1).$$

Dělení polynomů se zbytkem dává jednoznačný výsledek (to si sice dokazovat nebudeme, ale budeme tomu věřit). Všimněme si proto, že polynom g dělí polynom f právě tehdy, když je zbytek po dělení $f : g$ nulový.

Nyní se konečně vrhneme na řešení polynomiálních rovnic. Polynomiální rovnicí rozumíme rovnici, kdy je polynom f roven nule, tedy ve tvaru $f = 0$. Začneme definicí kořenu polynomu a jeho vlastnostmi.

Definice: Mějme reálné číslo u a polynom

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n.$$

Hodnota polynomu f po dosazení u je číslo

$$f(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + ... + a_nu^n.$$

O u řekneme, že je *kořenem polynomu f*, platí-li $f(u) = 0$.

Následující tvrzení dává do souvislosti kořeny polynomů a dělitelnost.

Tvrzení: Buď f polynom a a reálné číslo. Potom $(x - a)$ dělí polynom f právě tehdy, když a je kořenem polynomu f.
Důkaz: Nejprve dokážeme, že pokud $(x - a)$ dělí polynom f, pak je a kořen.
Protože $(x - a)$ dělí polynom f, existuje polynom h takový, že $f = (x - a)h$. Po dosazení hodnoty a dostáváme

$$f(a) = (a - a)h(a) = 0h(a) = 0,$$

tedy a je kořenem polynomu f.
Nyní ukážeme, že když je a kořenem polynomu f, potom $(x - a)$ dělí polynom f.
Pomocí dělení se zbytkem víme, že existují polynomy h a r tak, že $f = (x-a)h+r$.
Dále víme, že $\deg r < \deg{(x - a)} = 1$, tedy r je konstantní polynom. Po dosazení a do polynomu f dostáváme

$$0 = f(a) = (a - a)h(a) + r = r,$$

tedy máme nulový zbytek a $(x - a)$ dělí polynom f.

$\square$

Díky tomuto tvrzení o dělitelnosti můžeme zavést pojem násobnost kořene.

Definice: Buď f polynom a a reálné číslo. Řekneme, že a je *n-násobným kořenem polynomu f*, pokud $(x - a)^n$ dělí polynom f a $(x - a)^{n+1}$ polynom f nedělí. Jinými slovy, pokud existuje polynom g takový, že $f = g(x - a)^n$ a $g(a) \neq 0$.

Tedy například číslo 1 je dvojnásobný kořen polynomu $x^2 - 2x + 1$.

Soutěžní úlohy:

1. Nalezněte polynomy f a g takové, že $\deg(f+g) < \max(\deg f, \deg g)$.
2. Dokažte, že každý nenulový polynom stupně n má nejvýše n kořenů.

   Nápověda: Zkuste použít matematickou indukci.
3. Mějme polynom $x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 2$. Určete násobnost kořene 1.

Komplexní čísla

Při práci s reálnými polynomy se bohužel nevyhneme komplexním číslům. Pokud jste se s komplexními čísly zatím nesetkali, nezoufejte – od toho tu je tento studijní text. Základem k pochopení komplexních čísel je *imaginární jednotka*, jakýsi prvek, který definujeme rovností $i^2 = -1$. Komplexním číslem potom rozumíme číslo ve tvaru $a + ib$, kde a a b jsou reálná čísla.

S komplexními čísly můžeme pracovat podobně jako s reálnými čísly, pouze dělení je komplikovanější (protože nedovolujeme imaginární jednotku ve jmenovateli):

Sčítání a odčítání:

$$(a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

Násobení:

$$(a_1+ib_1)(a_2+ib_2) = a_1a_2+a_1ib_2+a_2ib_1+i^2b_1b_2 = (a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)$$

Dělení:

$$\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2}\frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} = \frac{a_1a_2 - a_1ib_2 + ib_1a_2 - i^2b_1b_2}{a_2^2 - i^2b_2^2} =$$
$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Můžeme si všimnout, že všechna reálná čísla jsou zároveň čísly komplexními, jsou to totiž čísla tvaru $a + i0$.

Komplexní čísla se hodí k tomu, abychom měli definované i odmocniny ze záporných čísel. Například

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4i^2} = 2i.$$

Dále můžeme zavést komplexní polynomy a prohlašovat o komplexních číslech, že se jedná o kořeny polynomů. Pro takové polynomy a kořeny budou platit všechny definice a tvrzení z předchozí kapitoly. Možná se ptáte, proč je tak důležité pracovat s polynomy nad komplexními čísly. Je to kvůli tomuto faktu.

Věta (základní věta algebry):
Nechť $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ je polynom s komplexními koeficienty stupně $n \geq 1$. Potom existuje komplexní číslo a takové, že $f(a) = 0$.

Z této věty plyne, že každý polynom stupně n má v komplexních číslech právě n kořenů, pokud každý kořen počítáme tolikrát, kolik je jeho násobnost. Podívejme se tedy například na kořeny polynomu $x^2 + 1$. Budeme postupovat výpočtem z vámi známého vzorce.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \pm\frac{\sqrt{-4}}{2} = \pm\frac{\sqrt{4i^2}}{2} = \pm\frac{2i}{2} = \pm i$$

Soutěžní úlohy:

4. Najděte všechny kořeny polynomu $x^3 - 1$ v oboru komplexních čísel.

Analytické řešení

Analytickým řešením polynomiální rovnice budeme myslet takový vzorec pro výpočet kořenů, ve kterém použijeme pouze koeficienty polynomu a základní operace – sčítání, odečítání, násobení, dělení a mocnění s odmocňováním. Klasickým příkladem analytického řešení je opět náš známý vzoreček pro řešení kvadratické rovnice

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Měli bychom být připraveni takovéto vzorce odvodit pro reálné polynomy druhého, třetího a čtvrtého stupně. Začneme jednoduchým pozorováním, a sice že stačí pracovat s polynomy tvaru $a_0 + a_1x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$, protože polynomy $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ a $\frac{a_0}{a_n} + \frac{a_1}{a_n}x + a_2x^2 + ... + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + x^n$ mají stejné kořeny.

Hojně využívanou metodou při hledání kořenů je substituce. Speciálně pomocí substituce $x = t + k$, kde t je nová proměnná a k je šikovně zvolená konstanta, jsme schopni dostat polynom jednodušších tvarů, pro které bude hledání kořenů snazší.

Soutěžní úlohy:

5. Odvoďte vzorec $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ pro výpočet kořenů kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$.

Kubická rovnice

Kubická rovnice je polynomiální rovnice třetího stupně, tedy rovnice tvaru

$$kx^3 + lx^2 + mx + n = 0$$

a my se nyní pokusíme odvodit vzorce pro její řešení. Jak už jsme zmínili, stačí pracovat s rovnicí tvaru

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

kde $a = \frac{l}{k}$, $b = \frac{m}{k}$ a $c = \frac{n}{k}$. Začneme tím, že si situaci ještě zjednodušíme a zaměříme se pouze na rovnici tvaru[1]

$$t^3 + pt + q = 0.$$

Prvním geniálním krokem tohoto postupu je pozorování, že pro libovolná čísla u a v platí

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0.$$

Z toho vidíme, že pokud čísla u a v splňují podmínky $-3uv = p$ a $-(u^3 + v^3) = q$, máme řešení rovnice $t^3 + pt + q = 0$ tvaru $t = u + v$. Odtud už není nijak složité vyjádřit takové u^3 a v^3 čistě pomocí známých parametrů. Pomocí základní věty algebry tedy víme, že dostaneme až tři možné hodnoty u a tři možné hodnoty v, z čehož bychom mohli dostat šest různých hodnot $u + v$. Ze základní věty algebry ale víme, že jsou nejvýše tři různé hodnoty $u + v$. Jak je to možné? Je to způsobené tím, že ne všechny dvojice u a v budou splňovat naši podmínku $-3uv = p$. To už by nám mělo stačit k tomu, abychom vyjádřili obecné vzorce pro kořeny rovnice. Takové vzorce by ovšem byly velmi dlouhé, takže to dělat nebudeme. Každopádně kdybychom moc chtěli, tak bychom k nim tímto postupem dospěli.

Soutěžní úlohy:

6. Vyjádřete u^3 a v^3 splňující podmínky $-3uv = p$ a $-(u^3 + v^3) = q$ pomocí parametrů p a q.

   Nápověda: Zkuste řešit kvadratickou rovnici $(y - u^3)(y - v^3) = 0$.

7. Nalezněte vhodnou substituci $x = t+k$, abychom z rovnice $x^3+ax^2+bx+c = 0$ dostali rovnici $t^3 + pt + q = 0$ a vyjádřete koeficienty p, q pomocí koeficientů a, b, c.

8. Najděte všechna (i komplexní) řešení rovnice $8x^3 + 36x^2 + 6x - 117 = 0$.

   Nápověda: V jednu chvíli se vám může hodit výsledek úlohy 4.

Kvartická rovnice

Kvartická rovnice je polynomiální rovnice čtvrtého stupně, tedy rovnice tvaru

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Pokud jsme u kubické rovnice prohlásili, že vzorce pro její kořeny jsou tak komplikované, že se je nevyplatí explicitně vyjadřovat, tak zde to platí dvojnásob. Opět si ovšem předvedeme způsob, jak bychom k takovým vzorcům mohli dospět.[2].

Znovu si situaci pomocí vhodné substituce můžeme zjednodušit na rovnici

$$t^4 + pt^2 + qt + r = 0.$$

[1]Autorem této metody je Niccolò Tartaglia (1500-1557), poprvé však byla publikovaná až v knize *Ars Magna* (1545) a výsledné vzorce jsou pojmenovány po autorovi knihy Gerolamu Cardanovi (1501-1576)

[2]Tato metoda byla poprvé publikovaná rovněž v knize *Ars Magna*, jejím autorem je však Cardanův student Lodovico Ferrari (1522-1565)

Nejprve převedeme všechny členy kromě $t^4 + pt^2$ na pravou stranu rovnice a zavedeme parametr k tak, abychom na pravé straně ekvivalentními úpravami dostali $(t^2+\frac{p}{2}+k)^2 = ...$. Dále zvolíme hodnotu k (postupovali jsme ekvivalentními úpravami – rovnice, kterou jsme dostali, tedy platí pro libovolnou hodnot k) a to tak, abychom na pravé straně měli také druhou mocninu nějakého mnohočlenu. Řešíme tedy rovnici

$$(t^2 + \frac{p}{2} + k)^2 = M^2,$$

tedy máme dvě možnosti, $t^2 + \frac{p}{2} + k = M$ nebo $t^2 + \frac{p}{2} + k = -M$. Pokud jsme postupovali správně, měli bychom v tomto momentě dostat dvě kvadratické rovnice a po všech zpětných dosazení do substitucí bychom měli získat řešení původní rovnice.

Soutěžní úlohy:

9. Určete pravou stranu rovnice $(t^2 + \frac{p}{2} + k)^2 = ...$ tak, aby byla tato rovnice ekvivalentní rovnici $t^4 + pt^2 = -qt - r$.
10. Ukažte, že umíme zvolit hodnotu parametru k tak, abychom na pravé straně rovnice $(t^2 + \frac{p}{2} + k)^2 = ...$ dostali druhou mocninu nějakého mnohočlenu.
11. Najděte všechna (i komplexní) řešení rovnice $x^4 + 4x^2 + 8x + 1 = 0$.

A co dál?

Zde bohužel naše hledání vzorečků pro řešení polynomiálních rovnic vyšších stupňů končí z velice prostého důvodu – nejde to. Tento výsledek je známý jako Abelova-Ruffiniho věta. To samozřejmě neznamená, že neumíme najít kořeny žádného polynomu, věřím, že u polynomu x^5 byste to zvládli i bez studijního textu. Například ale u rovnice

$$x^5 - x - 1 = 0$$

bychom se základními operacemi pohořeli.

Shrnutí soutěžních otázek

1. Nalezněte polynomy f a g takové, že $\deg(f + g) < \max(\deg f, \deg g)$.
2. Dokažte, že každý nenulový polynom stupně n má nejvýše n kořenů.
3. Mějme polynom $x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 2$. Určete násobnost kořene 1.
4. Najděte všechny kořeny polynomu $x^3 - 1$ v oboru komplexních čísel.
5. Odvoďte vzorec $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ pro výpočet kořenů kvadratické rovnice $ax^2+bx+c = 0$.
6. Vyjádřete u^3 a v^3 splňující podmínky $-3uv = p$ a $-(u^3 + v^3) = q$ pomocí parametrů p a q.
7. Nalezněte vhodnou substituci $x = t + k$, abychom z rovnice $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ dostali rovnici $t^3 + pt + q = 0$ a vyjádřete koeficienty p, q pomocí koeficientů a, b, c.
8. Najděte všechna (i komplexní) řešení rovnice $8x^3 + 36x^2 + 6x - 117 = 0$.
9. Určete pravou stranu rovnice $(t^2 + \frac{p}{2} + k)^2 = ...$ tak, aby byla tato rovnice ekvivalentní rovnici $t^4 + pt^2 = -qt - r$.
10. Ukažte, že umíme zvolit hodnotu parametru k tak, abychom na pravé straně rovnice $(t^2 + \frac{p}{2} + k)^2 = ...$ dostali druhou mocninu nějakého mnohočlenu.
11. Najděte všechna (i komplexní) řešení rovnice $x^4 + 4x^2 + 8x + 1 = 0$.

Řešení:

1. *Například polynomy x a $-x$.*

2. *Tvrzení dokážeme matematickou indukcí přes stupeň polynomu n.*
   Pro $n = 0$ máme konstantní nenulové polynomy. Ty zjevně nemají žádný kořen, tvrzení tedy platí.
   Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechny polynomy stupně n. Mějme polynom f stupně $n + 1$. Pak jsou dvě možnosti. Buď f žádný kořen nemá (tím pádem tvrzení platí), nebo existuje číslo a, které je kořenem polynomu f. V tom případě ale lze f rozložit jako $f = g(x - a)$ pro nějaký polynom g stupně n. Mějme nyní libovolný kořen polynomu f (označme si ho b). Potom platí $0 = f(b) = g(b)(b - a)$, tedy buď $b = a$ nebo $g(b) = 0$. Protože polynom g má z indukčního předpokladu nejvýše n kořenů, má polynom f nejvýše $n + 1$ kořenů. Tím je důkaz hotov.

3. *Platí, že $x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 2 = (x^2 + 3x + 2)(x - 1)^3$ a protože 1 není kořen polynomu $x^2 + 3x + 2$, je 1 trojnásobný kořen zadaného polynomu.*

4. *Na první pohled vidíme, že 1 je kořenem polynomu. Polynom $x^3 - 1$ tedy rozložíme jako $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ a ze vzorce pro řešení kvadratické rovnice nalezneme kořeny polynomu $x^2 + x + 1$. To jsou komplexní čísla $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Zadaný polynom má tedy kořeny $1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.*

5. *Nejprve celou rovnici vydělíme a, dostaneme tedy $x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Nyní použijeme substituci $x = t - \frac{b}{2a}$. Po dosazení dostáváme*
   $$t^2 - \frac{b}{a}t + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{b}{a}t - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{c}{a} = t^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0.$$
   Máme tedy $t^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, odkud víme, že $t = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ a po zpětném dosazení do substituce dostáváme
   $$x = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

6. *Podíváme se tedy na kvadratickou rovnici $(y - u^3)(y - v^3) = 0$ s proměnnou y. Po roznásobení a dosazení našich podmínek dostáváme $(y - u^3)(y - v^3) = y^2 - (u^3 + v^3) + u^3v^3 = y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0$. Standardně tedy nalezneme řešení kvadratické rovnice $y_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$. Protože ale víme, že u^3 a v^3 jsou řešení této rovnice, máme $u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$ a $v^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$*

7. *Po dosazení $t + k$ za x a roznásobení dostáváme*
   $$t^3 + 3kt^2 + 3k^2t + k^3 + at^2 + 2kat + ak^2 + bt + bk + c = 0$$
   $$t^3 + (3k + a)t^2 + (3k^2 + 2ka + b)t + (k^3 + ak^2 + bk + c) = 0.$$
   My chceme, aby $3k + a = 0$, dostáváme tedy substituci $x = t - \frac{a}{3}$ a koeficienty $p = b - \frac{a^2}{3}$ a $q = c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}$.

8. *Nejprve obě strany rovnice vydělíme osmi a poté zavedeme substituci* $x = t - \frac{3}{2}$, *tím dostáváme rovnici* $t^3 - 6t - 9 = 0$. *Z toho víme, že pokud chceme najít řešení ve tvaru* $t = u + v$, *musejí* u *a* v *splňovat* $u^3 = 1$ *a* $v^3 = 8$, *tedy* u *může být* $1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Obdobně určíme, že* v *může být* $2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}$. *Vybereme takové dvojice, aby* $uv = 2$, *tedy* $(1, 2), (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1 - i\sqrt{3}), (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1 + i\sqrt{3})$ *a jejich sečtením získáme řešení pro* t: $t_1 = 3$, $t_2 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *a* $t_3 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Po zpětném dosazení do substituce máme kořeny* $\frac{3}{2}, -3 + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *a* $-3 - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. *(nebo jsme si mohli tipnout, že* $t = 3$ *řeší rovnici po substituci, vydělit polynomy a použít vzorec pro kvadratickou rovnici).*

9. *Na levé straně rovnice máme po roznásobení* $t^4 + pt^2 + 2kt^2 + (\frac{p}{2} + k)^2$, *přebývají nám tam tedy členy* $2kt^2 + (\frac{p}{2} + k)^2$. *Provedeme tedy s rovnicí* $t^4 + pt^2 = -qt - r$ *ekvivalentní úpravu a sice k obou stranám přičteme* $2kt^2 + (\frac{p}{2} + k)^2$. *Tím dostaneme rovnici* $(t^2 + \frac{p}{2} + k)^2 = 2kt^2 - qt + (\frac{p}{2} + k)^2 - r$.

10. *Na pravé straně dostaneme výraz tvaru* $(At + B)^2$ *právě tehdy, když bude mít polynom* $2kt^2 - qt + (\frac{p}{2} + k)^2 - r$ *s neznámou* t *právě jeden dvojnásobný kořen. To nastává v momentě, kdy je determinant roven nule, tedy hledáme takové* k, *aby* $q^2 - 8k((\frac{p}{2} + k)^2 - r) = 0$. *To je kubická rovnice* $-8k^3 - 8pk^2 + 2(4r - p^2)k + q^2 = 0$ *s neznámou* k, *kterou po předchozí kapitole už teoreticky umíme vyřešit.*

11. *Diskriminant vede v tomto příkladě na rovnici* $-8k^3 - 32k^2 - 24k + 64 = 0$. *Všimneme si, že* 1 *je řešením této rovnice. Dostáváme tedy*

$$(x^2 + 3)^2 = (\sqrt{2}x - 2\sqrt{2})^2.$$

Stačí tedy vyřešit kvadratické rovnice $x^2 + 3 = \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}$ *a* $x^2 + 3 = -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}$. *Ty mají kořeny (a naše hledaná řešení tedy jsou)* $\frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{10 + 8\sqrt{2}}}{2}$ *a* $\frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{8\sqrt{2} - 10}}{2}$