1. Mějme trojúhelník ABC s ostrými úhly u vrcholů A a B. Do tohoto trojúhelníku vepíšeme obdélník $PQRS$ tak, že body P a Q leží na úsečce AB, bod R leží na úsečce BC a bod S leží na úsečce CA. Označme S_{ABC} obsah trojúhelníku ABC, S_{PQRS} obsah obdélníku $PQRS$ a S_{RCS} obsah trojúhelníku RCS. Poměr obsahů $S_{PQRS} : S_{ABC} = k$ pro nějaký kladný parametr k, určete hodnotu poměru $S_{RCS} : S_{ABC}$ tak, aby váš výsledek závisel pouze na parametru k. Nezapomeňte na diskuzi počtu řešení pro různé hodnoty parametru.

   Řešení: *Označme* $S_{RCS} : S_{ABC} = X$. *Úsečky* AB *a* RS *jsou rovnoběžné, takže trojúhelníky* ABC *a* RCS *jsou podobné. Platí tedy* $S_{RCS} : S_{ABC} = (|RS| : |AB|)^2 \Rightarrow |RS| : |AB| = \sqrt{X}$. *Podle vzorců pro výpočet obsahů platí*

$$k = S_{PQRS} : S_{ABC} = \frac{2|PQ||QR|}{|AB|h},$$

   kde h *označuje výšku trojúhelníku* ABC. *Pro poměr* $S_{RCS} : S_{ABC}$ *proto dostáváme*

$$X = S_{RCS} : S_{ABC} = \frac{|RS|(h - |QR|)}{|AB|h} = \frac{|RS|}{|AB|} - \frac{|PQ||QR|}{|AB|h} = \sqrt{X} - \frac{1}{2}k.$$

   Dostali jsme tedy rovnici s neznámou pod odmocninou a parametrem k

$$X + \frac{1}{2}k = \sqrt{X}.$$

   Tuto rovnici tedy umocníme na druhou (hledáme pouze kladná čísla a obě strany rovnice jsou kladné, můžeme to tedy beztrestně udělat) a vyřešíme

$$X^2 + kX + \frac{1}{4}k^2 = X$$

$$X^2 + (k-1)X + \frac{1}{4}k^2 = 0 \Rightarrow X_{1,2} = \frac{1 - k \pm \sqrt{1-2k}}{2}.$$

   Pro $0 < k < 1/2$ *dostáváme dvě možná řešení (je důležité uvědomit si, že* $1 - k - \sqrt{1-2k} > 0$*), pro* $k = 1/2$ *pouze jedno (tím jsme mimochodem nalezli největší možný obsah takového vepsaného trojúhelníku) a pro* $k > 1/2$ *úloha nemá žádné řešení.*

2. Dokažte, že neexistují kladná celá čísla a, b, c, která by splňovala následující rovnost

$$2a^3 + 4b^3 = c^3.$$

   Řešení: *Levá strana rovnosti je dělitelná dvěma, proto nutně 2 dělí* c^3*, takže 2 dělí* c. *Položme proto* $c = 2c_1$*, kde* c_1 *je kladné celé číslo. Upravme rovnici*

$$2a^3 + 4b^3 = 8c_1^3,$$

$$a^3 + 2b^3 = 4c_1^3.$$

   Z analogického argumentu nyní zavedeme $a = 2a_1$ *pro kladné celé číslo* a_1 *a upravme rovnici*

$$8a_1^3 + 2b^3 = 4c_1^3,$$

$$4a_1^3 + b^3 = 2c_1^3.$$

Užijeme-li ještě jednou tentýž argument, můžeme položit i $b = 2b_1$ *taktéž pro kladné celé číslo* b_1

$$4a_1^3 + 8b_1^3 = 2c_1^3,$$

$$2a_1^3 + 4b_1^3 = c_1^3.$$

Nyní si všimněme, že trojice (a_1, b_1, c_1) *musí splňovat stejnou rovnost jako trojice* (a, b, c)*, můžeme tedy rekurentně opakovat uvedený postup a získat tak postupně trojice* (a_2, b_2, c_2)*,* $(a_3, b_3, c_3), ...$*, které zase musí vyhovovat původní rovnici. Uvědomme si ale, že platí* $a > a_1 > a_2 > a_3 > ...$*, proto kdyby existovalo nějaké číslo* a*, muselo by nutně existovat i nekonečné množství čísel* $a_1, a_2, a_3, ...$*, která by byla ostře menší než* a*. Jelikož se ale pohybujeme v kladných celých číslech, tato situace není možná a nastává tedy spor, čímž je existence takových čísel vyloučená.*

3. Nalezněte všechny reálné funkce f, které splňují rovnici

$$\frac{f(x) + f(y)}{x + y} = f(xy),$$

   a) pro všechna kladná čísla x a y.
   b) pro všechna reálná čísla x, y splňující $x \neq -y$.

Řešení:

a) *Celou rovnost můžeme nejprve vynásobit výrazem* $x + y$*. Potom, platí-li rovnost pro všechny hodnoty* y*, musí platit speciálně pro* $y = 1$*. Dosadíme tedy, roznásobíme a dostaneme*

$$f(x) + f(1) = xf(x) + f(x),$$

odkud z nenulovosti x *můžeme psát, že* $f(x)$ *musí být tvaru*

$$f(x) = \frac{f(1)}{x},$$

kde můžeme (respektive musíme) dosazením ověřit, že $f(1) = c$ *může nabývat libovolné reálné hodnoty. Zadání proto vyhovuje funkce*

$$f(x) = \frac{c}{x},\ c \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^+.$$

b) *Dosazením* $y = 0$ *dostaneme pro* $x \neq -y = 0$

$$\frac{f(x) + f(0)}{x} = f(0),$$

odkud úpravou pro $x \neq 0$

$$f(x) = (x - 1)f(0).$$

Tady ale ještě nemůžeme skončit, protože dosazením do původní rovnice zjevně nedostáváme identickou rovnost levé a pravé strany. Speciálně určíme $f(1) = 0$, dosadíme $y = 1$ (odtud $x \neq -1$) při $f(x) = (x-1)f(0)$ (odkud $x \neq 0$) do původní rovnice. Dostaneme

$$\frac{(x-1)f(0)}{x+1} = (x-1)f(0) \Rightarrow (x-1)f(0)\left(\frac{1}{x+1} - 1\right) = 0,$$

což musí platit pro všechny hodnoty $0 \neq x \neq -1$, tedy speciálně například pro $x = 2$. Dosadíme-li, dostaneme, že nutně platí $f(0) = 0$ a pro $x \neq 0$

$$f(x) = (x-1)f(0) = 0.$$

Rozšíříme-li tedy definiční obor, dostaneme, že funkce musí být identicky rovna nule na všech různých číslech, tedy

$$f(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Zmiňme, že stejný výsledek dostaneme, když si uvědomíme, že podmínka v zadání úlohy a) musí být splněna i v tomto případě. Hledaná funkce tedy nutně musí být pro kladná x tvaru c/x. Konstanty c a $f(0)$ tedy musí splňovat

$$\frac{c}{x} = f(x) = (x-1)f(0),$$

pro všechna x, obě jsou tedy nutně nulové.