Slovníček elementárních pojmů diferenciálního a integrálního počtu pro mladé fyziky

Krátký studijní materiál pro všechny zájemce o fyziku

Vzniklo pro účely SŠ soutěže *Vědecký čtyřboj*, 2019

Pavel Kůs, Jaromír Mielec

Poslední editace: 25.11.2019

Obsah

Slovo úvodem

Cílem tohoto krátkého textu je vyložit žákům SŠ přehled elementárních základů diferenciálního a integrálního počtu, které by mohli prakticky využít při řešení SŠ soutěží a seminářů. Ani zdaleka se tento text nesnaží suplovat SŠ učebnice matematiky [1], kam čtenáře dále odkazujeme. Za zmínku stojí studijní texty z knihovničky Fyzikální olympiády [2], [3], které kladou důraz na aplikaci této matematiky ve fyzice.
Více o soutěži *Vědecký čtyřboj*, pro jejíž účely tento krátký studijní text vznikl, lze nalézt zde: `https://vedeckyctyrboj.cz/`.

1 Limita

Základním pojmeme je *limita funkce $f(x)$ v bodě x_0*. Jedná se o výraz:

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \tag{1}$$

který říká, k jaké hodnotě se funkce f blíží, když s x jdeme čím dál blíže k x_0. Limita je tedy číslo, běžně značíme L.
Proč jednoduše nenapíšeme:

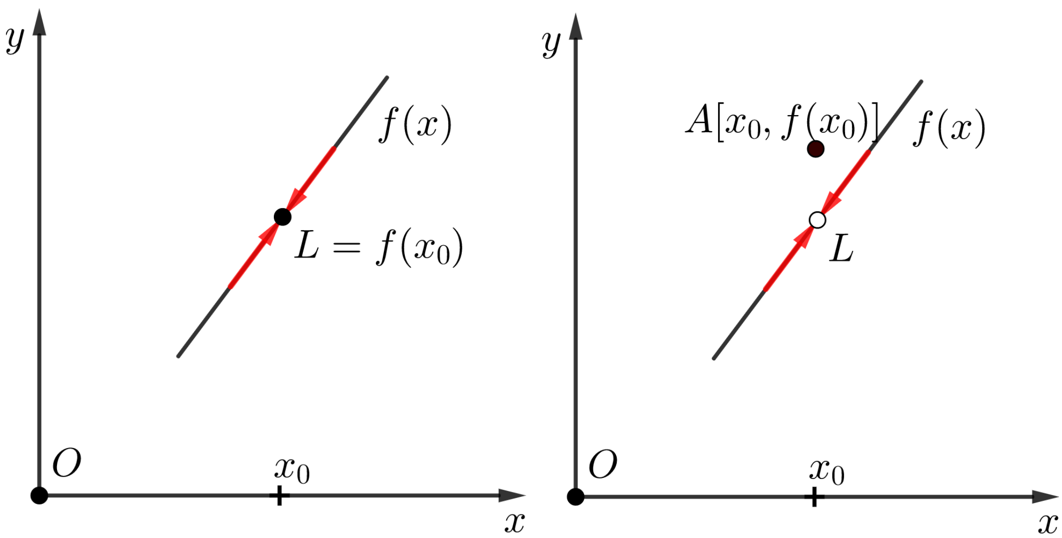
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)? \tag{2}$$

Pokud platí, že funkce f je v bodě x_0 definovaná a spojitá (funkci bychom nakreslili jednou čarou), potom výraz (2) skutečně platí a limita funkce f v bodě x_0 se rovná funkční hodnotě v tomto bodě. To je ostatně dobře patrné z obr. 1.
Limita nám říká, k jaké hodnotě spěje funkce $f(x)$, jak x je čím dále blíže x_0, i když v bodě x_0 není funkce definovaná nebo není spojitá. Limita je tedy obecnější pojem, který zavádíme k detailnějšímu studiu průběhu funkcí.
Z obr. 2 je jasné, že k x_0 se na ose x můžeme blížit zleva i zprava. Zavádíme proto *jednostranou limitu zleva*:

$$L_1 = \lim_{x\to x_0-} f(x) \tag{3}$$

a *zprava*:

$$L_2 = \lim_{x\to x_0+} f(x). \tag{4}$$



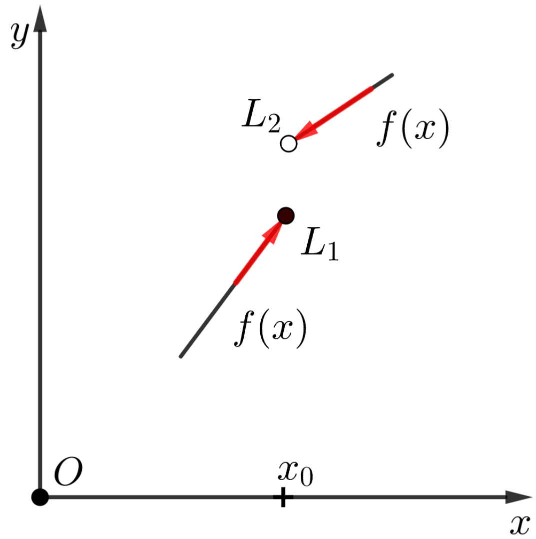
Obrázek 1: Vlevo: Limita a funkční hodnota v bodě se pro spojité funkce rovnají; Vpravo: Limita a funkční hodnota v bodě pro nespojité funkce nemusí být totožné.

Pokud se limita zleva a zprava sobě rovnají, limita v bodě x_0 existuje a je jim rovna:

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x), \tag{5}$$

popřípadě:

$$L_1 = L_2 = L. \tag{6}$$



Obrázek 2: Limity zleva a zprava se nerovnají: $L_1 \neq L_2$, tedy limita L neexistuje

Pokud se limita zleva a zprava ve svých hodnotách rozcházejí, limita v bodě x_0 neexistuje, viz obr. 2.
Při vyšetřování průběhu funkce nás typicky zajímá, jak se funkce chová v nekonečnech. Pak má smysl zavádět pouze jednostranné limity. Běžně píšeme:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x). \tag{7}$$

O limitách bychom toho mohli říci mnohem více, ale pro účely tohoto textu nám tento stručný leč intuitivní základ bude stačit. Pro formálně správné definování limity odkážeme na příslušnou literaturu [1].
Než zavedeme další nový pojem *derivace*, spočítáme limity několika vybraných funkcí v zadaných bodech. Výpočty limit mohou být značně trikové a k jejich vyčíslení je potřeba jisté zkušenosti. My si zde ukážeme jednoduché limity a později v kap. 3 si ukážeme mocné nástroje pro počítání komplikovanějších příkladů.

Budeme řešit následující příklady:

a) $f_1(x) = x + c$ v $x_0 = 0$, kde $c \in \mathbb{R}$;

b) $f_2(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ v $x_0 = 1$;

c) $f_3(x) = \cos x$ v $x_0 = \infty$;

d) $f_4(x) = e^x$ v $x_0 = \infty$;

e) $f_5(x) = e^x$ v $x_0 = -\infty$;

Řešení:

a)

$$\lim_{x \to 0}(x + c) = 0 + c = c.$$

Funkce f_1 je v bodě $x_0 = 0$ definovaná a spojitá a stačilo pouze dosadit do funkce, abychom určili její funkční hodnotu. Také se říká, že funkce f_1 má *vlastní limitu ve vlastním bodě* (co znamená „nevlastní“ ukážeme v dalších příkladech).

b) Dosazením $x_0 = 1$ do čitatele a jmenovatele zlomku bychom dostali nedefinovaný výraz $0/0$. Limita v bodě $x_0 = 0$ přesto existuje, jen funkční hodnota celého zlomku není v tomto bodě definovaná. Použijeme trik „rozklad čtverců“: $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1$. Potom limita funkce $g = x + 1$ v bodě $x_0 = 1$ je:

$$\lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

Co jsme vlastně udělali? Formálně jsme ve výpočtu nahradili funkci f_2 funkcí g, která je na rozdíl od f_2 v bodě $x_0 = 1$ definovaná, a funkce mají jinak stejný graf. Situace je podobná obr. 1, kdyby levý obrázek odpovídal funkci g a pravý funkci f_2. Z obrázku bychom si mohli myslet, že funkce mají stejnou limitu. To je skutečně pravda a pro formální důkaz bychom museli vyjít z formální definice limity, kterou jsme neuvedli. Opět odkazujeme na příslusnou literaturu [1]. Zde bychom řekli, že funkce f_2 má *vlastní limitu v nevlastním bodě.*

c) Funkce $\cos x$ je oscilující funkce, která nabývá hodnot $[-1, 1]$. Jak jde x do nekonečna, funkční hodnote stále „osciluje“ mezi dvě krajními hodnotami -1 a 1, jednostranná limita v $x_0 = \infty$ proto není definovaná.

d)
$$\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty.$$

Také se říká, že funkce f_4 má *nevlastní limitu v nevlastním bodě*

e)
$$\lim_{x\to -\infty} e^x = 0.$$

Podobně se říká, že funkce f_5 má *vlastní limitu v nevlastním bodě.*

2 Derivace

Novým a neméně důležitým pojmem je *derivace funkce f v bodě a.* Ten je definovaný limitou takto:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}. \tag{8}$$

Geometricky je derivace funkce f v bodě a směrnice nějaké přímky. Co tato věta znamená? Mějme přímku zadanou rovnicí

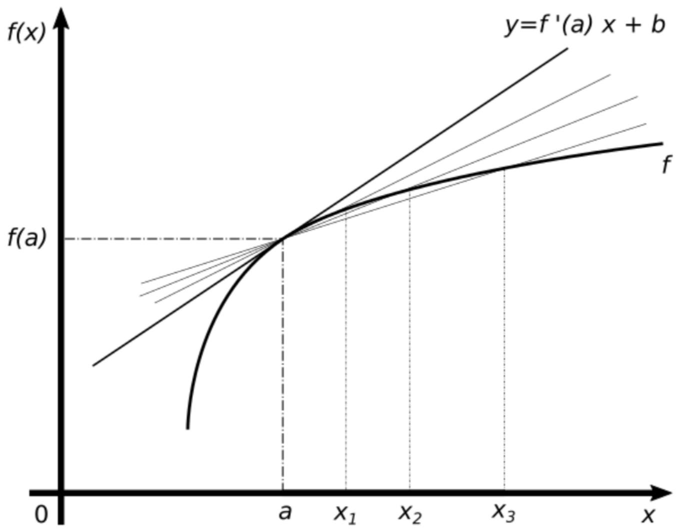
$$y = kx + b, \tag{9}$$

kde k je tzv. směrnice přímky, jejíž hodnota s ohledem na znaménko říká, jestli je přímka rostoucí ($a > 0$), konstantní ($a = 0$) nebo klesající ($a < 0$). Konstanta b pak posouvá přímku po ose y.

Představme si, že a ani b neznáme, ovšem známe ve dvou bodech x_1 a x_2 funkční hodnoty $y_1 = y(x_1)$ a $y_2 = y(x_2)$. Potom směrnice přímky je rovna:

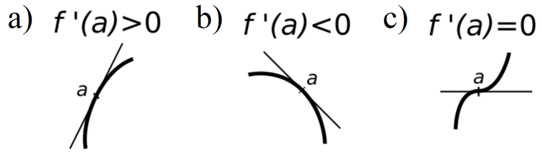
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{10}$$

U přímky je jedno, v jakých dvou jejích bodech známe funkční hodnoty. Přímka jako taková „roste“ nebo „klesá“ ve všech bodech stejně, popř. je konstantní.
U obecné funkce $f(x)$ se může derivace (jak se funkce mění) bod od bodu lišit, proto je nutné hledat limitu (8). Geometricky je přímka se směrnicí rovnou derivaci funkce f v bodě a tečnou ke grafu funkce f v bodě a (při vhodné volbě konstanty b). Tuto tečnu bychom dostali jako sečnu pro $\Delta x = x - a \to 0$, viz obr. 3.



Obrázek 3: Geometrická představa derivace

Pokud je derivace funkce f v bodě x kladná/záporná/nulová, je funkce v bodě x rostoucí/klesající/konstantní, viz obr. 4. Derivace je velmi důležitým nástrojem, pokud řešíme optimalizační úlohu - máme zadanou závislost veličiny f na x a snažíme se najít takovou hodnotu x, v níž bude mít funkce f extrém - minimum nebo maximum (tj. derivace funkce je nulová). Na konci této kapitolky si vyřešíme jednu ukázkovou optimalizační úlohu.



Obrázek 4: K výkladu derivace: a) funkce je rostoucí, b) funkce je klesající, c) funkce má v $x = a$ tzv. *inflexní bod*: na velmi malém (infinitezimálním) okolí bodu a je funkce konstantní

Poté, co jsme si vysvětlili základní ideu derivace, vraťme se zpět k tomu, jak derivaci značíme. Rozdíl v čitateli (8) označíme $\Delta f(x) = f(x) - f(a)$, rozdíl ve jmenovali

$\Delta x = x - a$. S tímto označením bychom napsali:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\bigg|_a, \tag{11}$$

kde svislá čára udává, v jakém bodě derivaci vyčíslujeme.
Matematici zašli se značením ještě dále a zavedli:

$$f'(a) = f'(x)\bigg|_a = \frac{df(x)}{dx}\bigg|_a = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}. \tag{12}$$

To slovy vlastně znamená, že d je „velmi malé“ Δ. Čárka nad f je pak nejjednoduším zápisem toho, že se jedná o derivaci. Nakonec můžeme pro derivaci volit kterýkoliv z těchto zápisů:

$$f'(a) = f'(x)\bigg|_a = \frac{df(x)}{dx}\bigg|_a = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\bigg|_a = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}. \tag{13}$$

Bývá zvykem, že pokud nemáme na mysli konkrétní bod a a raději bychom psali výraz pro derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru, namísto a psát rovnou x. Tedy derivace funkce f v nějakém bodě x bychom napsali jako $f'(x)$. Pro výpočty derivací z definice ve tvaru limity je ovšem praktičtější x a a rozlišovat.

Z definice derivace funkce lze odvodit tyto základní vlastnosti:

1. $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$,
2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+g(x)f'(x)$,
3. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

Ukažme si na příkladu derivace funkce $f(x) = x^n$, jak najít její derivace. Z definice píšeme:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\bigg|_a = \lim_{x\to a}\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}\bigg|_a. \tag{14}$$

Nyní využijeme binomického rozvoje: $(x+\Delta x)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}(\Delta x)^i = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \ldots$, kde tečky $\ldots$ jsou členy, které obsahují vyšší mocniny Δx. Dosazenám do (14) dostaneme:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \ldots - x^n}{\Delta x}\bigg|_a = nx^{n-1}\bigg|_a = na^{n-1}, \tag{15}$$

kde členy x^n se odečetly a členy schované v tečkách po vydělení Δx obsahují první nebo vyšší mocniny Δx, což v limitě $\Delta x \to 0$ z těchto členů udělá nulu. Zbývá jediný nenulový člen, nx^{n-1}, který po vyčíslení v $x = a$ dá hodnotu derivace funkce v libovolném bodě a z definičního oboru funkce f.
Na závěr poznamenejme, že se běžně namísto a píše rovnou x, tedy *první derivace funkce f v bodě x* je:

$$f'(x) = nx^{n-1}. \tag{16}$$

Krom této první derivace (jedna čárka nad f) lze konstruovat i vyšší derivace, například:

$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}. \tag{17}$$

Krom tohoto zápisu *druhé derivace* pomocí čárek je běžné psát $f^{(2)}(x)$, což bývá užitečné pri zápisu vyšších derivací, například n-tou derivaci funkce f bychom zapsali jako $f^{(n)}(x)$.

f	f'	f	f'
$c,\ c \in \mathbb{R}$	0	$\sin x$	$\cos x$
x	1	$\cos x$	$-\sin x$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}	$\mathrm{tg}x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$x^a,\ a \in \mathbb{R},\ x > 0$	ax^{a-1}	$\mathrm{cotg}x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$a^x,\ a > 0$	$a^x \ln a$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x,\ x > 0$	$\frac{1}{x}$	arctg	$\frac{1}{1+x^2}$
$\log_a x,\ x > 0, a > 0, a \neq 1$	$\frac{1}{x \ln a}$	arccotg	$-\frac{1}{1+x^2}$

Tabulka 1: Tabulka základních derivací

Příklad: Pohyb v homogenním tíhovém poli

Míček byl vyhozen svisle vzhůru s počáteční rychlostí v_0 v tíhovém poli s gravitačním zrychlením g. Výška nad zemí je dána vztahem $h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$. Naším cílem bude určit maximální dosaženou výšku.
To uděláme jednoduše tak, že zderivujeme funkci $h(t)$ podle t a položíme rovnu nule:

$$\frac{dh(t)}{dt} = v_0 - gt = 0, \tag{18}$$

což je ve shodě s naší intuicí, tedy míček dosáhne maximální výšky nad zemí, když se míček při svislém letu vzhůru zastaví a jeho rychlost bude nulová.
Samozřejmě, striktně vzato jsme nedokázali, že se jedná o maximum, dokonce jsme ani nedokázali, že se jedná o extrém. Z intuice je nám ale tato skutečnost jasná a pro podrobnější diskuzi odkazujeme [2].

3 l'Hospitalovo pravidlo a Taylorův rozvoj

V praxi se setkáváme s limitami typu 0/0 nebo ∞/∞. S prvním typem jsme se dokonce setkali v příkladu b) na konci kapitoly 1. Tam jsme si lehce poradili trikem

"rozdílů čtverců", ne však vždy lze udělat podobný trik. V takových situacích existují dva základní postupy, jak limitu vyřešit. Ani jeden nebudeme dokazovat či se blíže zabývat jejich formálním náležitostmi, jen uvedeme výsledky.
Prvním postupem je *l'Hospitalovo pravidlo* (čteme "lopitalovo"). To říká, že pokud platí a) nebo b):

a) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$,

b) $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$,

pak platí:

$$\lim_{x\to a} = \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} = \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{19}$$

V b) přitom není kladená žádná podmínka na limitu funkce f, může to být i dokonce i $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.
Ukažme si to na příkladu b) z konce kapitoly 1:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2x}{1} = 2. \tag{20}$$

Druhým postupem je tzv. *Taylorův rozvoj funkce f kolem bodu a*. Funkce f v libovolném bodě x lze rozložit do (obecně nekonečného) součtu polynomů jedinečným způsobem:

$$f(x) = \sum_k^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k, \tag{21}$$

kde kolem bodu a děláme rozvoj, $f^{(k)}$ je jiné označení pro k-tou derivaci a $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1)k$, běžně říkáme "*$k$ faktoriál*"[1].
Bez sumy bychom rozvoj kolem bodu a zapsali takto:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6} f'''(a)(x-a)^3 + \ldots. \tag{22}$$

Taylorův rozvoj nám vlastně říká, že pokud budeme znát v nějakém bodě a funkční hodnotu funkce f a všechny její derivace, známe pak funkční hodnotu v libovolném bodě jejího definičního oboru.
Na předchozí úlohu nemá smysl snažit se aplikovat Taylorův rozvoj, neboť funkce jak v čitateli tak jmenovateli jsou již polynomy. Kde lze použít Taylorův rozvoj a stejně tak l'Hospitalovo pravidlo, si ukážeme na dalším příkladu.
Předtím ale udelejme drobrou poznámku. Pokud píšeme Taylorův rozvoj funkce f a napíšeme členy do jistého řádu n a vyšší už ne, bývá zvykem psát namísto teček $\ldots$ raději $O(x^{n+1})$. To znamená, že jsme neuvedli všechny polynomy stupně $n+1$ a vyšší. Konvence je ve skutečnosti o něco bohatší, ale do toho zde nebudeme zabíhat.
Nyní spočítejme příklad:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x}. \tag{23}$$

[1] Jen připomeňme, že $0! = 1$.

Formálně se opět jedná o výraz 0/0. Použitím l'Hospitalova pravidla dostáváme:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0, \tag{24}$$

kde jsme využili derivací funkcí $\sin x$, $\cos x$ a konstanty z tab. 1.
Nyní výpočet provedeme s Taylorovým rozvojem. Taylorovy rozvoje pro funkcí $\sin x$ a $\cos x$ kolem počátku jsou:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{1}{6}x^3 + \dots, \tag{25}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{1}{4}x^2 + \dots. \tag{26}$$

Dosazením rozvojů do limity dostáváme

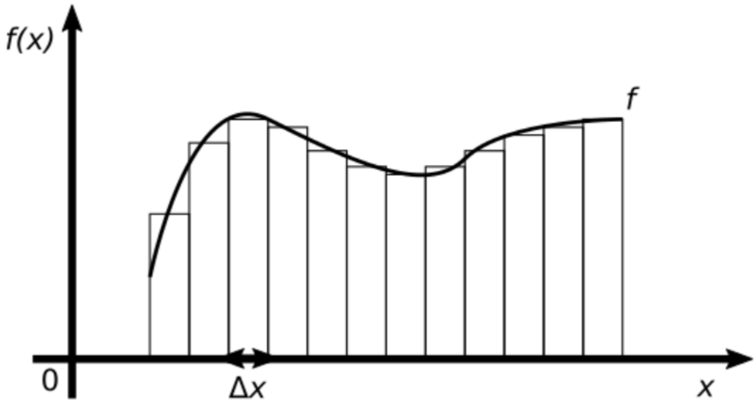
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{4}x^2 + O(x^4) + 1}{x + O(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{4}x + O(x^3)}{1 + O(x^2)} = 0, \tag{27}$$

kde jsme v předposledním rovnítku vytkli čitatele a jmenovatele x, které se vzájemně zrušily.

4 Integrály

Mějme graf na obr. 5 a požadujme spočítat plochu pod křivkou. V prvním přiblížení si můžeme osu x rozdělit na malé elementy $\Delta x = (b-a)/n$ a sestrojit nad nimi obdélníčky s výškou $f(x_i)$ (tzv. dolní odhad). Plochu pod křivkou bychom pak odhadli jako:

$$S = \sum_{i=0}^{n} f(x)\Delta x. \tag{28}$$



Obrázek 5: Geometrický význam integrace: obsah plochy pod křivkou

Pro limitu $n \to \infty$ zavádíme nové značení:

$$\Delta x \to dx, \sum_{i=0}^{n} \to \int_a^b. \tag{29}$$

Je intuitivně jasné, že pokud bychom dělení na ose x zjemňovali více a více, byl by výpočet obsahu plochy stále více přesnější. Formálně bychom psali:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x)\Delta x = \int_a^b f(x)dx. \tag{30}$$

Výraz (30) se nazývá *určitý integrál* a jeho geometrický význam je obsah plochy pod křivkou ohraničenou *integračními mezemi* a a b.
Vedle určitého integrálu definujeme *neurčitý* integrál, který se od určitého liší neudáním integračních mezí. Jak tak to chápat? Zatímco určitý integrál byl číslo, neurčitý je *zobrazení*, které na vstupu vezme funkci $f(x)$ a vrátí funkci jinou, tzv. *primitivní funkci* $F(x)$ ve stejném bodě x. Co jsme zatím řekli bychom napsali takto:

$$F(x) = \int f(x)dx. \tag{31}$$

Není zatím zřejmé, jak souvisí určitý integrál (číslo) s neurčitým integrálem (zobrazením). Abychom to pochopili, musíme si neurčitý integrál definovat rigorózně. Pak bude jeho souvislost s určitým integrálem jasná.
Primitivní funkce se definuje jako *inverzní zobrazení k derivaci*. Co to znamená? Přesně to znamená, že pro nějaké libovolné x je derivace primitivní funkce F rovna funkci f v bodě x:

$$F'(x) = f(x). \tag{32}$$

Z této definice je vidno, že primitivní funkce je určera až na konstantu, tj. pro $G(x) = F(x) + c$ platí:

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + c' = F'(x) = f(x). \tag{33}$$

Primitivní funkce jednoduchých funkcí lze určit tak, že je prostě uhádneme. Mějme příklad $f(x) = x^n$. Z tab. 1 víme, že $f'(x) = nx^{n-1}$. Snažíme se najít takové $F(x)$, že $F'(x) = f(x)$. Zde není náročné uhádnout hledanou primitivní funkci $F(x) = x^{n+1}/(n+1) + c$, kde c je *integrační konstanta*. Přehled primitivních funkcí jednoduchých funkcí je v tab. 2
Když máme představu, co to primitivní funkce je, pojďme se podívát, jak souvisí s určitým integrálem. K tomu budeme potřebovat tzv. *Lagrangeovu větu o střední hodnotě*. Ta říká, že pro funkci f definovanou na intervalu $[a, b]$ existuje bod $\xi \in (a, b)$, že:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{34}$$

Geometrický význam Lagrangeovy věty vidíme na obr. 6.
Z Lagrangeovy věty a z definice neurčitého integrálu plyne:

$$f(\xi_i) = \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \tag{35}$$

kde $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$. Nyní jsme již krůček od našeho cíle. Dosadíme do (36):

$$S = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x \simeq \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n} F(x_{i+1}) - F(x_i) = F(x_{n-1}) - F(x_0). \tag{36}$$

f	F	f	F
c, $c \in \mathbb{R}$	cx	$\cos x$	$\sin x$
x^a, $a \in \mathbb{R}/\{-1\}$, $x > 0$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\mathrm{tg} x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathrm{cotg} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$
e^x	e^x	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg} x$
a^x, $a > 0$, $a \neq 0$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$ nebo $-\arccos x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg} x$ nebo $-\mathrm{arccot} x$

Tabulka 2: Tabulka základních derivací

Pro limitu $n \to \infty$ dostáváme:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{37}$$

kde $x_0 = a$ a $x_{n-1} \to b$ v limitě.
Pokud jsme schopni určit primitivní funkci $F(x)$, spočítáme určitý integrál (plochu) mezi integračními mezemi a a b tak, že vyčíslíme primitivní funkci v těchto krajních bodech a odečteme od sebe. Běžně se užívá zápis:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \tag{38}$$

Pravé straně rovnice (37) se také přezdívá *Newton-Leibnitzova formule.*
V praxi se setkáváme s potřebou zintegrovat funkce, jejíchž primitivní funkce se nehledají tak snadno, jak bychom našli pro funkce z tab. 2. Existují rozličné způsoby, jak si poradit s komplikovanějšími integrály. Cílem všech je převést komplikovaný integrál na nějakou variantu integrálů z tab. 2. My si zde představíme metody *per partes* a *substituce.*

Per partes

V kapitole o derivacích 2 jsme setkali s *Leibnitzovým pravidlem*:

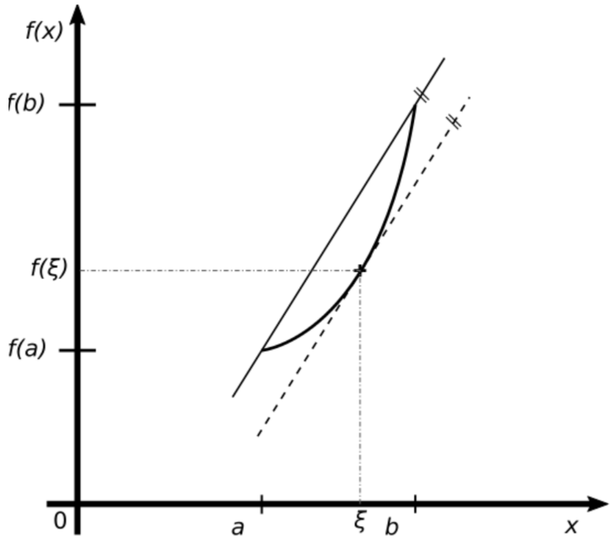
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + g(x)f'(x). \tag{39}$$

Nyní tuto rovnici integrujme:

$$\int_a^b (f(x)g(x))'\,dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b g(x)f'(x)dx. \tag{40}$$

Protože integrování je inverzní operace k derivování, pro levou stranu rovnice okamžitě píšeme:

$$\int_a^b (f(x)g(x))'\,dx = [f(x)g(x)]_a^b. \tag{41}$$



Obrázek 6: K Lagrangeově věta

Výsledná formule zní:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \tag{42}$$

Pro ilustraci této metody mějme příklad:

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx = [x.(-e^{-x})]_0^\infty - \int_0^\infty 1.(-e^{-x})dx, \tag{43}$$

První dva členy v $[\dots]_a^b$ vyjdou nulové, neboť:

$$[x.(-e^{-x})]_0^\infty = -xe^{-x}\Big|_{x=\infty} + xe^{-x}\Big|_{x=0} = 0, \tag{44}$$

přitom to, že první člen je nulový, plyne z jeho limity:

$$\lim_{x\to\infty} x.e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0. \tag{45}$$

Substituce

Druhou základní metodou je *substituce*. Jak název napovídá, změníme integrační proměnnou a doufáme, že převedeme integrál do jednoduššího/dobře známého tvaru, ve kterém ho už umíme vyřešit.
Princip substituce si ukážeme přímo na příkladu. Mějme určit:

$$\int_0^1 xe^{-x^2}dx. \tag{46}$$

Zvolíme substituci: $y = x^2$, najdeme $dy = 2xdx$ a upravíme integrační meze: $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. Substitucí integrační proměnné v integrálu a změnou integračních mezí dostáváme:

$$\int_0^1 xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-y}dy = \frac{1}{2}[-e^{-y}]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}). \tag{47}$$

Příklad: Obvod a obsah kruhu

Chceme-li spočítat obvod kruhu, provádíme integraci:

$$O = \int_{\text{obvod}} dl. \tag{48}$$

Ze symetrie lze pro element kruhu psát: $dl = Rd\phi$, kde R je poloměr kruhu a $d\phi$ malý úhel. Očividně probíhá úhel od $[0, 2\pi)$. Dostáváme tím:

$$O = \int_{\text{obvod}} dl = \int_0^{2\pi} Rd\phi = R[\phi]_0^{2\pi} = 2\pi R. \tag{49}$$

Při výpočtu plochy kruhu opět vyjdeme ze symetrie. Chceme spočítat integrál:

$$S = \int_{\text{plocha}} dS, \tag{50}$$

kde $dS = 2\pi r dr$ je infinitezimální ploška a integrace probíhá mezi $[0, R]$ (tedy od středu na okraj). Náš integrál proto vypadá:

$$S = \int_{\text{plocha}} dS = \int_0^R 2\pi r dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \pi R^2. \tag{51}$$

5 Diferenciální rovnice

Jednou z nejdůležitějších aplikací diferenciálního a integrálního počtu je řešení diferenciálních rovnic. Principem řešení rovnic je hledání funkcí, u nichž máme zadané podmínky na jejich derivace. V této kapitole se seznámíme pouze s nejjednoduššími typy rovnic a metodami řešení.

Separace proměnných

Nejjednodušší rovnice, se kterými se můžeme setkat, jsou tvaru:

$$\frac{d}{dt}x(t) = g(t)h(x(t)). \tag{52}$$

Hledáme funkci $x(t)$, která vyhovuje rovnici (52). Postup je takový, že výrazy explicitně závisející na proměnné t převedeme na jednu stranu, závislou proměnnou x na druhou a integrujeme obě strany:

$$\frac{dx}{h(x)} = \frac{dt}{g(t)} \Rightarrow \int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t)dt. \tag{53}$$

Pokud se nám obě strany rovnice podaří vyintegrovat, zbývá algebraickými úpravami vyjádřit hledané $x(t)$. Tento obecný postup si ilustrujeme na konkrétním příkladu níže.

Příklad: Pád s odporem

Mějme kuličku o hmotnosti m, kterou upustíme z počáteční výšky h_0 a necháme padat. Při pádu kuličky lze předpokládat lineární závislost odporové síly na rychlosti pádu, tj. $F = -kv$, kde $k > 0$. Našim úkolem bude nalézt rychlost kuličky v obecném čase t.

Nejprve si zadání přepíšeme v řeči rovnic:

$$ma = F = -kv + mg. \tag{54}$$

Víme, že zrychlení je derivace rychlosti podle času – dostáváme tedy diferenciální rovnici:

$$\frac{d}{dt}v(t) = -\frac{kv(t)}{m} + g. \tag{55}$$

Úpravou rovnice dostaneme:

$$\int \frac{mdv}{kv - gm} = -\int 1dt. \tag{56}$$

Použitím substituce: $w = kv - gm$, $dw = kdv$ vyřešíme integrál:

$$\frac{m}{k}\ln|kv - mg| = -t + C_0 \Rightarrow \ln|kv - mg| = -\frac{tk}{m} + C_1 \Rightarrow kv - mg = K_0 e^{-\frac{tk}{m}}, \tag{57}$$

což dává:

$$v(t) = K_1 e^{-\frac{tk}{m}} + \frac{mg}{k}. \tag{58}$$

Pomocí počáteční podmínky $v(0) = 0$ dopočítáme integrační konstantu $K_1 = -\frac{mg}{k}$. Pro rychlost v čase t jsme tedy dostali vztah:

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{tk}{m}}\right). \tag{59}$$

Lineární rovnice 1. řádu

Dalším důležitým typem diferenciálních rovnic jsou lineární rovnice. Budou nás tedy zajímat rovnice tvaru:

$$\frac{d}{dt}x(t) = a(t)x + b(t). \tag{60}$$

Pro účely tohoto textu budeme předpokládat, že $b(t) = 0$. Potom dostáváme rovnici:

$$\frac{d}{dt}x(t) = a(t)x. \tag{61}$$

Takovou diferenciální rovnici nazýváme *homogenní lineární rovnice 1. řádu*. Homogenní, protože platí $b(t) = 0$, a 1. řádu, protože se v rovnici vyskytují nejvýše první derivace, a lineární, neboť součet dvou různých řešení rovnice je opět její řešení. Tuto rovnici lze vyřešit metodou *separace proměnných*, kterou jsme si ukázali v minulé části.

Harmonický oscilátor

Krásným příkladem pokročilejší diferenciální rovnice je harmonický oscilátor. Řešíme následující problém – máme hmotný bod o hmotnosti m, na který působí jediná síla F ve směru k bodu $x = 0$. Tato síla navíc závisí jen na souřadnici hmotného bodu x a konstantě $k > 0$. Na jednu stranu tedy dostáváme[2] $F = -kx$, na druhou stranu máme z 2. Newtonova zákona $F = ma$. Když obě rovnice dáme dohromady, dostáváme pohybovou rovnici harmonického oscilátoru[3]:

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \tag{62}$$

Označme si $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Pokud si vzpomeneme na derivace základních funkcí, po chvílce přemýšlení nás napadne, že funkce $\cos(\omega t)$ bude řešení rovnice. To stejné by nás mohlo napadnout i o funkci $\sin(\omega t)$. Protože obě goniometrické funkce jsou řešením rovnice (62), která je *lineární*, je lineární kombinace:

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \phi). \tag{63}$$

opět řešením té samé rovnice. Všimněme si, že veličina ω, kterou jsme na začátku definovali jako k/m, má význam úhlové frekvence $\omega = 2\pi/T$, kde T je perioda.
To, že součet dvou řešení je opět řešení, je netriviální tvrzení a obecně neplatí. Zde platí právě z toho důvodu, že naše rovnice je lineární.

Důležité je si uvědomit, že pokud dostaneme při řešení fyzikální úlohy rovnici, která má formálně stejný tvar jako (62), pak musí mít i stejné řešení a to nezávisle na fyzikální podstatě problému. Fyzikální systém se tak chová v abstraktním slova smyslu jako „harmonický oscilátor“ (nebo „pružina“).

Příklad: Brzděný pohyb

Těleso o hmotnosti m se pohybuje rychlostí v_0 a proti jejímu pohybu působí síla přímo úměrná jeho rychlosti $F = -kv$. Na jaké dráze s_1 těleso zastaví?
Řešení: Pomocí 2. Newtonova zákona sestavíme pohybovou rovnici:

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dx} = -kv. \tag{64}$$

Tuto rovnici vyřešíme separací proměnných:

$$mdv = -kdx \Rightarrow m\int_{v_0}^{0} dv = -k\int_{0}^{s_1} dx \Rightarrow s_1 = \frac{mv_0}{k}. \tag{65}$$

[2] Znaménko minus vyjadřuje, že síla působí do rovnovážné polohy, kterou jsme zavedli jako $x_0 = 0$.
[3] Využívám toho, že zrychlení je derivace rychlosti podle času, a tedy druhá derivace dráhy podle času.

Reference

[1] MATEMATIKA PRO GYMNÁZIA DIFERENCIÁLNÍ A INTEGRÁLNÍ POČET, Dag Hrubý; Josef Kubát, Prometheus, 1997

[2] DIFERENCIÁLNÍ POČET VE FYZICE, Miroslava Jarešová, Ivo Volf, Studijní text Fyzikální olympiády, http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/difpoc.pdf

[3] INTEGRÁLNÍ POČET VE FYZICE, Miroslava Jarešová, Ivo Volf, Studijní text Fyzikální olympiády, http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/intpoc.pdf